Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

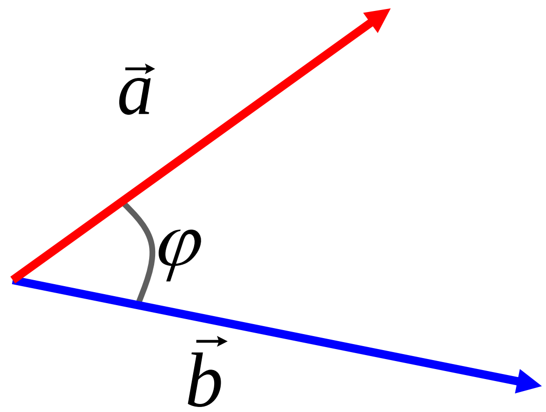
Припіяло Сергій Олександрович, вчитель математики, Припіяло Анжеліка Михайлівна, вчитель фізики і математики, Лозуватська ЗОШ І-ІІІ ступенів Шполянської районної радиЧеркаської області.

Скалярний добуток двох векторів – число, що дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів. Зокрема, скалярний квадрат вектора дорівнює сумі квадратів його координат. Якщо $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Кут між двома векторами – кут, що утворений векторами, які колінеарні даним і виходять з однієї точки.



Кут між векторами змінюється в межах від 0^o до 180^o. Якщо хоча б один із векторів нульовий, то кут між цими векторами невизначений. Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0^o, а між протилежно напрямленими – 180^o.

Теорема.

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi =$$

$$= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}\cdot cos\varphi.$$

Для обчислення кута φ між векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ використовують формулу:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Наслідок.

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то $0 < \varphi < 90^o$

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то $90^o < \varphi < 180^o$

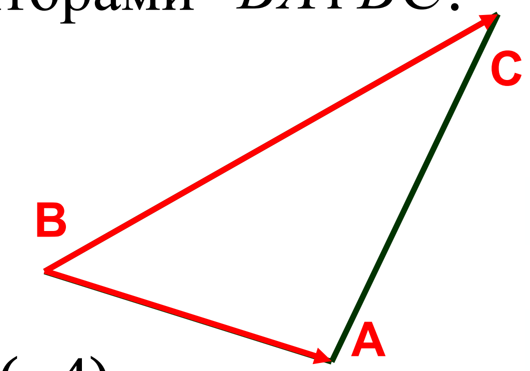
Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\varphi = 90^o$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Визначити кут ABC трикутника ABC, якщо $A(3;-1;1)$, $B(1;-1;3)$, $C(3;1;-1)$.

Розв'язання.

Кут B трикутника ABC – кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.



Визначимо координати векторів:

$$\overrightarrow{BA} = \left(3-1;-1-(-1);1-3\right) = \left(2;0;-2\right);$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(3-1;1-(-1);-1-3\right) = \left(2;2;-4\right).$$

Обчислимо косинус кута B:

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{2\cdot 2+0\cdot 2+(-2)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}} =$$

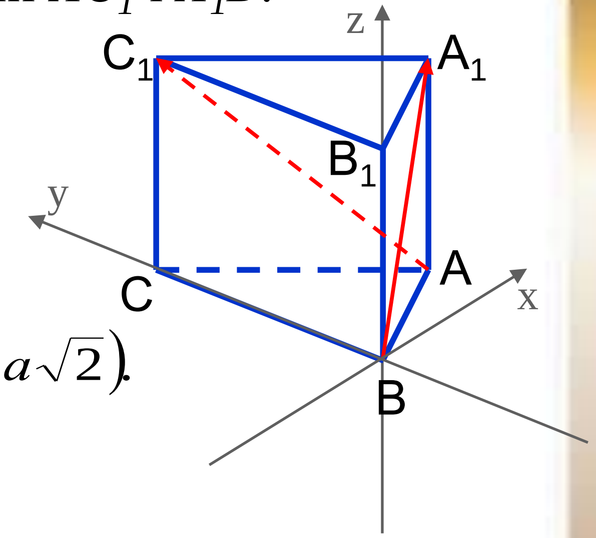
$$= \frac{12}{\sqrt{172}} = \sqrt{\frac{144}{172}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $\angle ABC = 60^{\circ}$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 2. Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, в якій $AA_1 \div AB = \sqrt{2}$. Знайти кут між прямими AC_1 і A_1B.

Розв'язання.



Нехай $AB=a$, тоді $AA_1=a\sqrt{2}$.

Введемо прямокутну систему координат.

Визначимо координати точок A, B, A_1, C_1:

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right);\ A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right);\ B=(0;0;0);\ C_1\left(0;a;a\sqrt{2}\right).$$

Знаходимо координати відповідних векторів:

$$\overrightarrow{AC_1}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right);\ \overrightarrow{BA_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right).$$

Обчислимо косинус кута φ між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA_1}\right|}=\frac{-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}}=\frac{1}{2}.\ \text{Тому}\ \varphi=60^o$$